Auf einem karierten Papier werden L-Formen platziert, sodass der gesamte Bereich ausgefüllt wird.

Lshape.wmf

Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie man die Ls anordnet. Die einfachste ist das stehende 2\*4-Rechteck. In diesem Rechteck gibt es 2 Möglichkeiten, wie man die Ls darin anordnet.

Lshape.wmf

In der Wahl, ob die Ls rechts oder links im Rechteck sind, kann ein Bit an Information gespeichert werden. Bei den 240 Ls sind es 120 Rechtecke, also 120 Bit. Jedes L trägt damit 0,5 Bit. Ist es möglich, dass ein L ein ganzes Bit bringt?

Statt stehende Rechtecke kann man liegende Rechtecke nehmen, doch das ist gleichwertig.

Lshape.wmf

Entropie= = 0,5

Nimmt man statt Rechtecke Quadrate, dann gibt es in einem Quadrat viel mehr Möglichkeiten.

Lshape.wmf

Ein Quadrat kann also 4+2 verschiedene Möglichkeiten haben. Die ersten 4 sind 2 übereinander liegende Rechtecke und die anderen 2 sind die drehsymmetrische Anordnung. Die drehsymmetrische Anordnung hat nur 2 Möglichkeiten, benötigt aber 4 Ls. Damit speichern 4 L nur ein Bit, sodass ein L nur 0,25 Bit enthält.

Entropie= = 0,25

Aber was ist mit den stehenden Rechtecken im Quadrat? Das wären doch 4+4+2=10 Möglichkeiten? Die stehenden Rechtecke werden nicht mitgezählt, um sie der äußeren Form zu zuordnen. Deshalb bleibt es erstmal bei 6 Möglichkeiten und die anderen 4 werden später besser verwertet.

Lshape.wmf

Kombiniert man die 4 Möglichkeiten mit den 2 Möglichkeiten, dann ergibt sich eine mittlere Entropie von

Entropie= = 0,375 Bit

Da man aber noch die Möglichkeit hat zwischen beiden Möglichkeiten zu wählen, gibt es nochmal ein Extrabit für das Quadrat.

Entropie= = = 0,625 Bit

Damit haben die Quadrate mehr Entropie als die stehenden Rechtecke.

Anstatt zu entscheiden, dass die drehsymmetrische Form mit 50% Wahrscheinlichkeit auftritt, kann man sie auch mit 33% Wahrscheinlichkeit auftreten lassen, denn sie liefert nur 1 Bit statt 2. Das entspricht dann den Würfeln zwischen 6 Möglichkeiten.

= 2,58

Entropie= = 0,646

Das ist nochmal ein bisschen mehr als 0,625.

Die wirkliche Entropie ist jedoch vom Zufall ab, da die drehsymmetrische Form weniger Entropie hat, als 2 Rechtecke.

Lshape.wmf

Was ist mit längeren Rechtecken? Also ein Rechteck, wo 6 Ls reinpassen. Das stehende Rechteck hat eine Breite von 1, das Quadrat hat eine Breite von 2 und dieses hat nun eine Breite von 3.

Lshape.wmf

In einem solchen Rechteck können die Ls auf 3\*2 weitere verschiedene Möglichkeiten angeordnet werden. Alle Möglichkeiten, die es für das Quadrat und das stehende Rechteck gibt, zählen nicht mehr. Die 3 ist die Lage des liegenden Rechteckes im großen Rechteck und die 2 sind die beiden Möglichkeiten des kleinen Rechteckes. Das kleine Rechteck kann in der Mitte, unten oder oben im großen Rechteck sein. Da alle 3\*2 Möglichkeiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden stecken in dem Wurf

= 2,58 Bit

Da das große Rechteck 6 Ls enthält, sind darin

Entropie= = 0,431 Bit

Das sind nur 2/3, als wenn man die 6 Möglichkeiten für Quadrate nimmt.

Was ist mit längeren Rechtecken?

Lshape.wmf

Bei längeren Rechtecken ist die Anordnung immer ähnlich. In der Mitte kommen kleine Rechtecke und es gibt die Möglichkeit, ob diese oben oder unten beginnen.

Jedes kleine Rechteck bringt ein Bit und die Möglichkeit bringt ein Bit. Beim 4 breiten Rechteck sind 2 kleine Rechtecke enthalten. Also hat das große Rechteck 3 Bit.

Entropie = = 0,375 Bit

Lshape.wmf

Macht man das Rechteck länger, dann passen mehr kleine Rechtecke rein. Bei Breite 6 sind da 4 Rechtecke drin.

Entropie = = 0,416 Bit

Es geht noch länger

Lshape.wmf

Mit jede 2 Ls, die hinzu kommen, entsteht ein liegendes kleines Rechteck.

Entropie = = 0,4375 Bit

Die Entropie erreicht das Limit von 0,5.

**Zusammenfassung**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Rechteck | Breite | L | Bit | Bit/L |
| 2\*1 | 1 | 2 | 1 | 0,5 |
| 2\*2 | 2 | 4 | 2,5 | 0,625 |
| 2\*3 | 3 | 6 | 2,58 | 0,43 |
| 2\*4 | 4 | 8 | 3 | 0,375 |
| 2\*5 | 5 | 10 | 4 | 0,4 |
| 2\*6 | 6 | 12 | 5 | 0,4166667 |
| 2\*7 | 7 | 14 | 6 | 0,4285714 |
| 2\*8 | 8 | 16 | 7 | 0,4375 |

Das Rechteck mit der Breite 4 ist also das schlechteste und das Quadrat mit der Breite 2 ist am besten.

Wie wäre es, wenn man das Quadrat mit 10 Möglichkeiten belässt? Das wäre

= 3,32

Entropie= = 0,83 Bit

Statt die 10 Möglichkeiten im Quadrat zu belassen, ist es besser, wenn man Quadrate und Rechtecke kombiniert.

Man entscheidet sich für das stehende Rechteck oder das Quadrat und gewinnt damit 1 Bit. Dieses eine Bit ist die äußere Entropie und das andere war bisher die innere Entropie.

Lshape.wmf

Lshape.wmfWählt man mit gleicher Wahrscheinlichkeit Breite 1 oder 2, dann beträgt die Innere Entropie

innere Entropie= = 0,583 Bit

Man nimmt das Rechteck und das Quadrat und das Rechteck liefert 1 Bit, das Quadrat 2,5 Bit und teilt das durch die gesamte Fläche. Da jede Form mit gleicher Wahrscheinlichkeit wählbar ist, hat jede Form eine äußere Entropie von 1 Bit.

R= Q= = = 1

äußere Entropie= = = = 0,333 Bit

Die gesamte Entropie ist damit

Entropie= = 0,583+ 0,333= 0,916 Bit

Da 0,916 Bit viel mehr sind als 0,83 wurden in den Rechtecken nur die Möglichkeiten zugelassen, die es nicht bereits in den kürzeren Rechtecken gibt.

Ändert man die Wahrscheinlichkeiten vom 50% zu 50% auf LR=56% für das stehende Rechteck, dann steigt die Entropie auf 0,92.

R= = 0,84

Q= = 1,18

äußere Entropie= = = 0,3436 Bit

Entropie = 0,5766+0,3434= 0,92 Bit

Man kann ja nicht nur Rechtecke der Breite 1 und 2 kombinieren. Es gibt ja auch noch längere Rechtecke. Aber die längeren haben alle eine innere Entropie von unter 0,5. Können sie überhaupt die Entropie vergrößern. Bringt man eine Zahl kleiner 0,5 in den Mittelwert, der größer ist als 0,5, dann ist das erstmal schlecht.

Lshape.wmf

Beispiel für Breite 3

Lshape.wmf

Beispiel für Breite 4

innere Entropie= = 0,454

Das ist gegenüber der vorherigen 0,583 deutlich weniger. Der Bonus kommt aus der äußeren Entropie. Da nun 4 Formen zur Auswahl stehen, hat jede Form eine äußere Entropie von 2 statt nur 1.

R= Q= R3= R4= = 2

äußere Entropie= = = 0,4

Entropie= 0,454+0,4= 0,854

Hier kann einiges an den Wahrscheinlichkeiten rum probiert werden, um das Maximum raus zu holen. Die langen Rechtecke verbessern die äußere Entropie der kurzen Rechtecke nur weil sie möglich sind. Deshalb kann man die Längeren etwas seltener verwenden.

Um auf eine Entropie von knapp über 1,003 zu kommen geht mit diesen Wahrscheinlichkeiten

0,498; 0,351; 0,092; 0,0303; 0,0151; 0,076; 0,038; 0,019

Jede weitere Breite muss mit genau halber Wahrscheinlichkeit auftreten, wie sein Vorgänger, da die innere Entropie nur um 1 Bit pro Breite ansteigt, aber 2 Ls hinzukommen. Das andere fehlende Bit muss aus der äußeren Entropie kommen. Der Zweierlogarithmus steigt um 1, wenn sein Inhalt sich verdoppelt.

Das Maximum aus innerer und äußerer Entropie ist damit rausgeholt.

Ein bisschen mehr geht noch, indem man zwischen den Zeilen noch was einfügt.

Lshape.wmf

An 2 Zeilen berühren sich 2 liegende Rechtecke. Diese werden mit 50% Wahrscheinlichkeit um 90° gedreht.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, wie man 2 Ls verdrehen kann. Sowohl zwischen den Rechtecken als auch zwischen den Zeilen. Und es muss eindeutig sein. Das linke obere Rechteck entsteht aus der Verschmelzung eines stehenden Rechteckes mit einem Quadrat. Diese Belegung des 3 breiten Rechteckes zählt nicht zu den 6 Möglichkeiten des 3 breiten Rechteckes.

Lshape.wmf

Was bedeuten die Farben?

Ein L ist ein Polygon 6 Punkte und benötigt damit 16 Doppelbyte. Die grünen und orangen Ls berühren sich am Drehpunkt. Statt 2 Polygone mit 6 Punkte kann auch ein Polygon mit 10 Punkte gezeichnet werden. Dies spart 2 Punkte und ein Polygon. Das große Polygon braucht nur 24 Doppelbyte, was eine Ersparnis von einer Linie im Wert von 8 Doppelbyte ist.

Anschließend kommt noch ein Packer zum Einsatz, der sich über Eck berührende Ls allgemein verbindet. Dies spart auch jedesmal 8 Doppelbyte, sodass die Dateien insgesamt um 25% kleiner sind.

Weiße Ls sind unkomprimiert.

Lshape.wmf

Lshape.wmf